

流れの数値計算結果の グラフィック表示について

梅 田 眞三郎 *

A Graphic Display for the Flow in the Numerical Solutions

Shinzaburo UMEDA

ABSTRACT

In this paper numerical method using the Galerkin weighted residuals approach is applied to analyze the flow around a cylinder. Using the results of numerical analysis the distributions of the velocity vectors and the equi-velocity contours are shown on a color graphic display. And a vortex behind a cylinder is also shown in the mathematical expression with an equiangular spiral function.

1. まえがき

最近、計算機及びその付属周辺機器の充実により流れの可視化にも計算機を利用した画像処理やグラフィック表示に関する研究が行われている。

本研究は、数値シミュレーションによる流れの可視化を目標に、円柱まわりの流れを例にとり、有限要素法の重み付き残差法を用い数値解析を行い、その結果の流れのグラフィック表示を試みた。すなわち数値解析結果から得られた流速を用い、流線図、流速分布図や等流速分布図等のカラーグラフィック表示を試みた。さらに円柱背後の渦を等角らせんを用い拡散係数の変化も考慮して表示を行った。

2. 数値解法

2. 1 基礎方程式⁽¹⁾

基礎方程式として、圧力 p と流速 u, v を未知変数とする次の Navier-Stokes 方程式を考える。この方程式は、粘性流体の流れを支配する数学的な方程式として知られ、方程式の形は乱流現象が導入されたときでも変化しない。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

問題の適用範囲を広くするために、次のような無次元変数を導入する。

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_0^2 l} \quad (4)$$

ここで、 l は特性長さ、 u_0 は基準速度である。

その結果、Navier-Stokes 方程式を無次元の形に書き表わすと次式のようにになる。

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{F_x l}{\rho u_0^2} - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{u_0 l} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (5)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = \frac{F_y l}{\rho u_0^2} - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\nu}{u_0 l} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (7)$$

表記の便宜上、星印は消去する。したがって流速と圧力の両方は、星印がなくても無次元と考える。さらに(5)~(7)式を次のレイノルズ数とフルード数を導入して簡略化する。

$$R_E = \frac{u_0 l}{\nu}, \quad F_R = \frac{u_0}{\sqrt{gl}} \quad (8)$$

したがって、基礎方程式は次式のように表わされる。

* 土木工学科

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{l_{x1}}{F_R^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_E} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{l_{x2}}{F_R^2} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_E} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

ここで、 l_{x1} 、 l_{x2} は重力場の方向に対する x 、 y 軸方向のそれぞれの余弦を表わす。

2.2 重み付き残差法による定式化⁽²⁾

前式のような支配方程式を定義したとき、解を求める方法は解かれるべき物理問題に大いに関係している。もし流れの領域や境界条件が十分に与えられておれば、解析的な解を求めることができる。しかしながら、実際の流れの問題の大部分に対しては、流れの領域が幾何学的に複雑であるので、直接解析ができるような近似解法がとられがちである。ここでは、流体力学の分野で広く用いられるようになってきた重み付き残差法を適用する。

基礎方程式を有限要素で空間的に離散化するために、重み付き残差法の一つである Galerkin 法を適用する。Galerkin 法は、重み関数を試行関数と同一関数に選ぶ方法であり、試行関数として解析領域を有限要素に分割した場合の各節点において定義される形状関数を用いられる。

形状関数は、有限要素の内部において流速や圧力の分布形状を仮定する関数で、この関数のとり方が有限要素法の成否を決める重要な役割を果たす。この関数は、有限要素の形状と密接な関係がある。本研究では、辺の中間にも節点をもつ 8 節点四角形要素を用いた。これは従来用いられている三角形要素に比べて精度が高くなる。

各要素内の関数 Z は、形状関数 $G_i(x, y)$ と未知節点値 $Z_i(t)$ との一次結合 $Z(x, y, t) = \langle G_i(x, y) \rangle \{Z_i(t)\}$ で定義される。またその定式化は残差 R_k を解析全領域で平均的に "0" とするように各要素の未知節点値を連立させて解く方法で、次式のようなになる。

$$\sum_{i=1}^L \int G_i(x, y) \cdot R_k(x, y, t) dE_i = 0, \quad j=1, 2, \dots, M, k=1, 2, 3 \quad (12)$$

ここで、 L は分割された全要素数、 M は要素内に含まれる節点総数、 E_i は i 番目の要素の面積を表わす。

この定式化の過程において、境界条件として Dirichlet 的固定境界と Neumann 的自然境界を考え、部分積分ならびに Gauss の発散定理を導入して面積分を線積分に変換する。

マトリックス要素の数値積分は、曲辺に沿って直接に

行うことは不可能であるため、 $x-y$ 座標系における任意形状の要素を同じ多項式関数で表現される $\xi-\eta$ の一般曲線座標系の正方形領域に写像して行われる。すなわち座標の内挿補間関数 $S_\alpha(\xi, \eta)$ と物理量の内挿補間関数 $G_\alpha(x, y)$ を同一関数に選ぶアイソパラメトリック変換を行う。

数値積分は、積分区間分の積分点の関数値を計算し、これに重みを掛けたものの和として積分値を近似する Gauss の積分公式を用いる。

次にマトリックス方程式の係数行列は非対称であり、また非零要素成分が散在している。曲面要素においては節点間の連成が大きく、通常のパンド解法ではどのように番号付けをしてもパンド幅が大きくなるので、計算機容量や演算時間にかなり影響を与える。そこで今回の計算では、Gauss の消去法に基づいたフロント法を用いた。

以上の定式化に従った計算手順の概略を示すと図 1 のようになる。

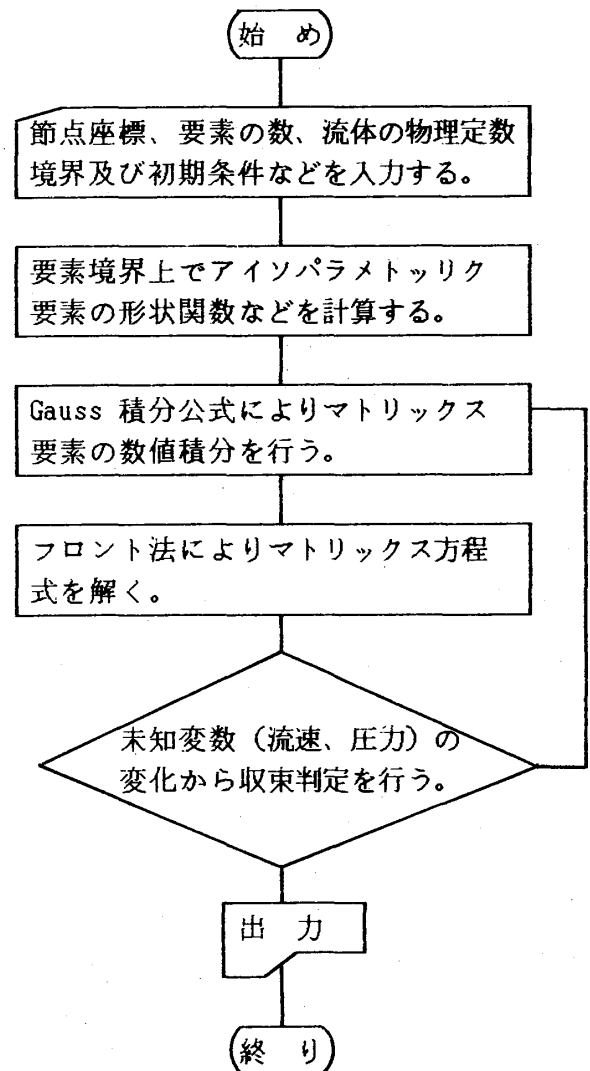


図 1 流れ図

3. 解析例⁽³⁾

計算にあたって円柱まわりを図2のような73要素に分割し、264節点を設けた。図3に示すような境界条件の基で、種々の円柱径Dに対して流速 u 、 v 及び圧力 p を求めた。さらに流速から流れ関数 Ψ を求めた。

格子点Oでの流れ関数値 Ψ_O は、基準点Rでの値 Ψ_R と格子速度 u 、 v より次式で求めた。

$$\Psi_O = \int_R^O (u dy - v dx) + \Psi_R \quad (13)$$

実際の計算においては、 Ψ_O の値は積分経路によって異なるので図4のような2つの経路の Ψ_O の値の平均値をとった。得られた流れ関数から直接流線を求めると滑らかな曲線で表わすことができないので、流れ関数値を零以上と零以下とに分けて、それぞれSpline関数などによる近似的平滑化から流線を表わした。

次に流線間隔を利用して、円柱まわりの流速分布の違いや円柱背後の渦の状況をカラーにて表示することを試みた。

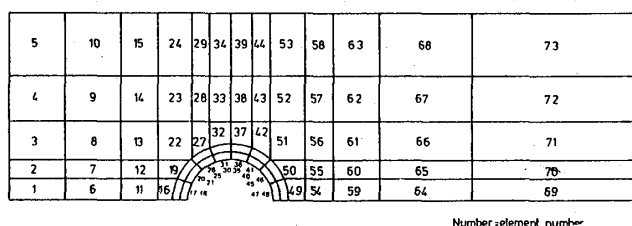


図2 要素分割

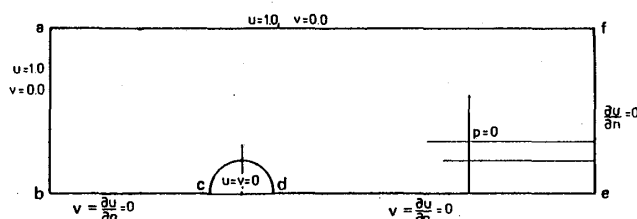


図3 - 境界条件

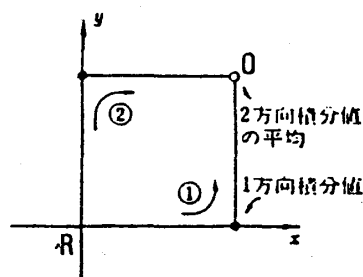


図4 積分経路

4. 流れのグラフィック表示

4.1 グラフィックディスプレイ

使用したディスプレイ装置はグラフィカ社製作で、マンマシン・コミュニケーション機能を最大限に発揮できるように内部にインテリジェント機能を内蔵している。画面に表示する画素情報をフレームメモリーに記憶し、その内容を1行1行走査しながら表示するラスタースキャン方式で、描画命令を記憶するセグメントバッファをもつ。解像度は768×512で、線のギザギザを抑えるため輝度変調を行うスムーズベクタ機能が搭載されている。なお、多角形図形のぬりつぶしに際しては、多角形の2つの稜線にはさまれた線分のベクトルで処理した。

画素の色の決定は、マルチスペクトルバンド画像の階調処理方法に用いられる擬似カラー方法を参考に、光の三原色であるR、G、Bのそれぞれの輝度レベルの色の組合せによって考えた。すなわち今回は、流線間隔の違いによる濃淡レベル等に関して、図5に表わす色の組合せを輝度レベルの関係からR、G、Bの振分けを考えた。

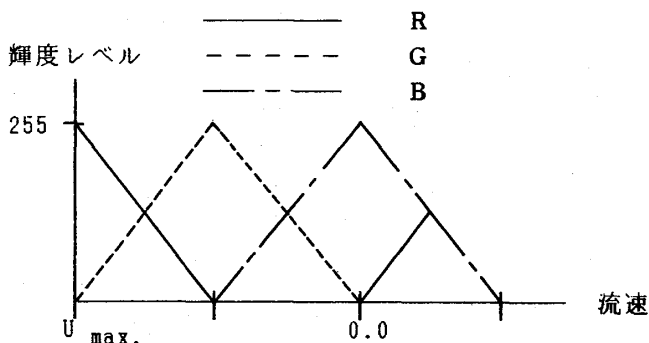


図5 流速と輝度レベル

4.2 流速図の表示⁽⁵⁾

計算によって得られた流速 u 、 v から、以上のカラーディスプレイ装置の特性を考慮して種々のグラフィック表示を試みた。まず(13)式により流線を求め、その流線間隔から等流速分布図を求めた。この図に流速ベクトル図を付け加え、円柱の周辺をとり出して表わしたのが写真1である。円柱上方部分での流速が速くなっている状況、円柱前後での流速の変化や円柱背後の渦の形成状況などをこの画像から把握することができる。

4.3 渦の表示

可視化実験結果などに見られる円柱背後の渦の状況を再現するために、前述の流線を利用して渦の中心と思われる位置から等角ラ線を用いて数値解析結果の渦の表示を試みた。

渦の向心、渦の幅及び幅方向での色の濃淡などを工夫

するために、円柱背後での拡散係数の変化を計算してみた。その計算にあたっては、次の Pick の拡散方程式を用いた。⁽⁶⁾

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} (Kx \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (Ky \frac{\partial C}{\partial y}) \quad (14)$$

$$\text{ただし, } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \quad (15)$$

ここに、 C ：拡散物質の濃度、 Kx, Ky ：それぞれ x, y 方向の拡散係数で、今回 $Kx = Ky$ とした。 U, V ：流速成分で、円柱背後の格子点周辺の流速を用いた。

差分化については、(14)式と空間及び時間に関してともに中央差分を用いて差分式を導いた。円柱背後の1点を拡散源とし、その点で濃度1を与えて渦周辺までの拡散状況を調べてみた。その1例として、図6に等濃度線を破線で図示した。流線を基にして等角線を用いて求めた渦を同時に示した。この等濃度線と渦とで囲まれる拡散源方向からの長さ（一点鎖線）を渦の幅や幅方向での色の濃淡などの決定に参考とした。その結果、円柱背後の渦の表示は写真2のようになった。この画像からは色の濃淡がよく分かり、その形態などは実験による可視化結果をかなり再現しているように思われる。

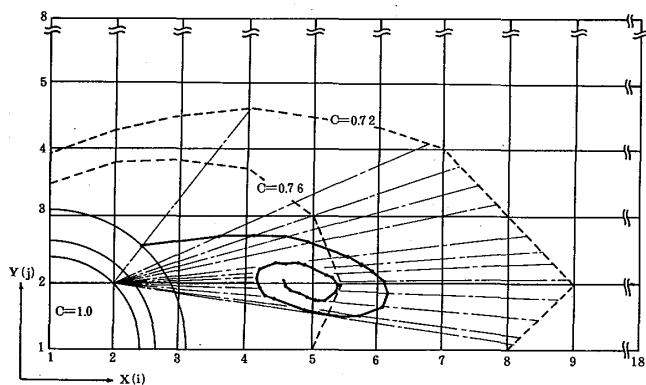


図6 等濃度線と渦

5. あとがき

数値シミュレーションによる流れの可視化への手始めとして流況のカラーグラフィック表示から試みた。 $X-Y$ プロットなどに比べ流況特性を視覚的観点から種々の工夫をこらすことができ、流況把握も容易となり数値解析による流れの可視化を前進させることができた。

今後、解析対象を高 Re 数流れへ拡大し、物理的に流れを十分再現できるように数値解析に乱流解析を加えたり、グラフィック表示上の曲線表示方法の改良などを試

みていくつもりである。

最後に、本研究を進めるにあたって御助言を賜った神戸大学工学部菅源亮教授に記して謝意を表します。また本研究の一部は、昭和59年度文部省科学研究費（奨励研究A）の補助を受けたことを付記する。

＜参考文献＞

- (1) C. Taylor and T. G. Hughes: Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations, Pineridge Press, 1981
- (2) J. J. Connor and C. A. Brebbia (奥村敏恵監訳): 流体解析への有限要素法の応用, サイエンス社, 1979
- (3) 梅田眞三郎, 森行裕章: カラーディスプレイ装置による流れの表示について, 第36回土木学会中・四国支部研究発表会講演概要集, 1984
- (4) 小林敏雄: コンピュータによる流れの解析, 第1回流れの可視化講習会, 流れの可視化学会, 1983
- (5) 梅田眞三郎: 円柱まわりの流れのグラフィック表示について, 流れの可視化学会誌, Vol.4, Suppl., 1984
- (6) 土木学会編: 土木工学における数値解析—流体解析編, サイエンス社, 1976

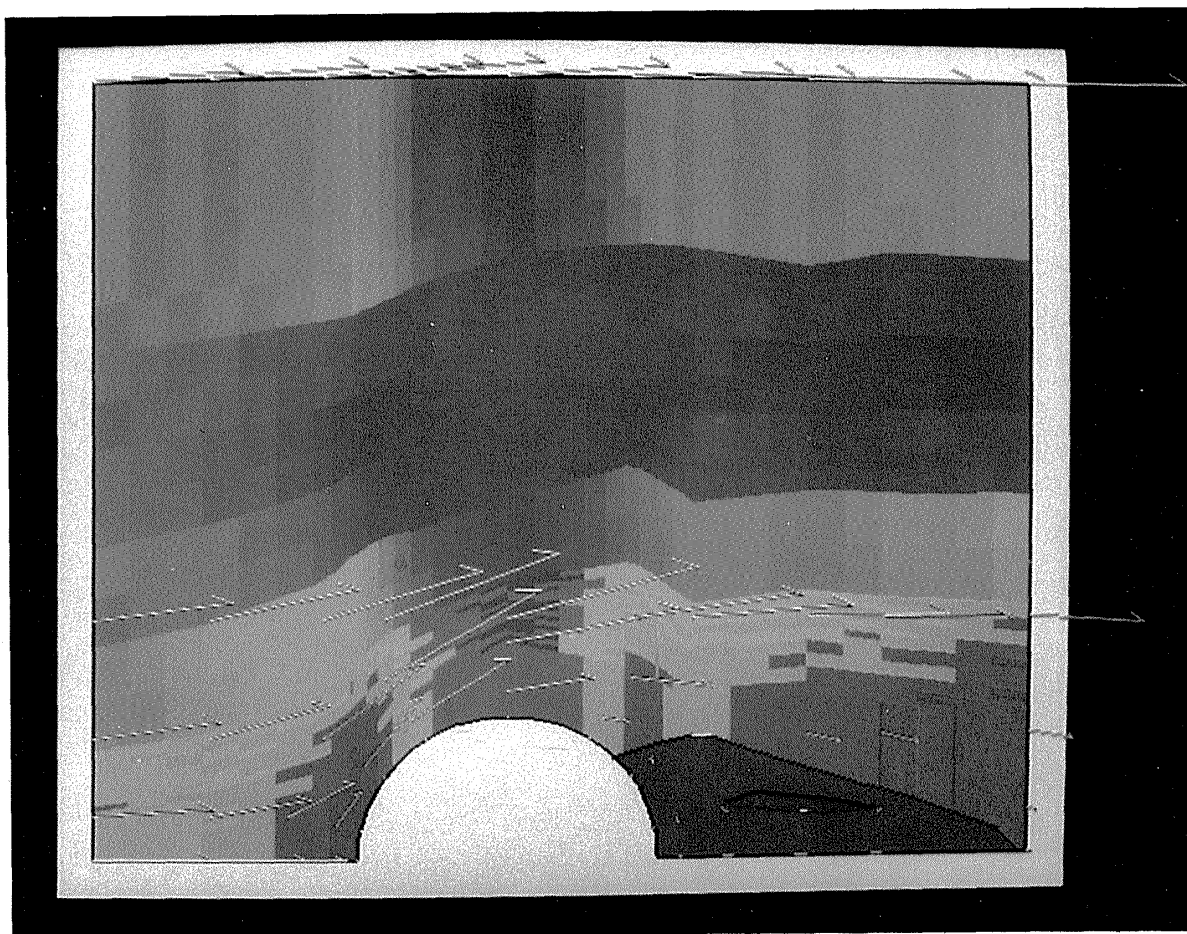


写真1 等流速分布図と流速ベクトル図

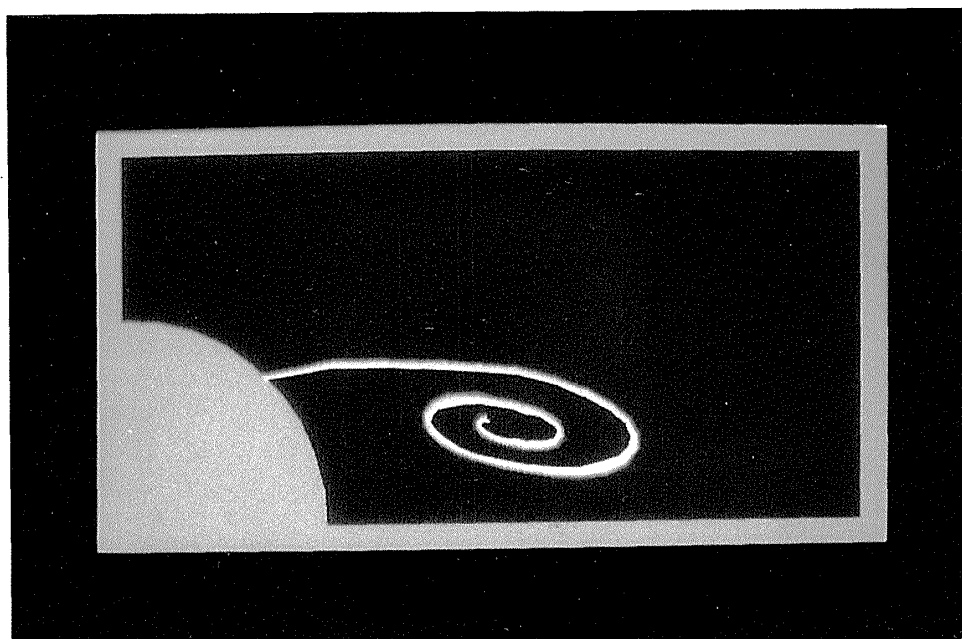


写真2 円柱背後の渦